

Strom jako matematická struktura – i v umění

Jaroslav Nešetřil
KAM-ITI, UK MFF

V historii a filosofii přírodních věd se vyskytuje populární a poněkud provokativní slovní spojení *neodůvodnitelná účinnost matematiky v přírodních vědách* (unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences). Slovní spojení pochází z názvu slavného článku E. Wignera (nositele Nobelovy ceny 1963 za fyziku) (1). Wigner v článku ilustruje na dnes už klasických fyzikálních příkladech výhodnost matematického aparátu, který se v některých případech zdá předjímat experiment a fyzikální evidenci. Článek vyvolal diskusi, která trvá do dnešních dnů (2), (3). Modifikace názvu, který samozřejmě matematici mají rádi, byla použita i v jiném kontextu (4), (5).

Předkládaný článek není příspěvkem do této volné diskuse. O užitečnosti matematiky, tím spíše v umění, se nepokoušíme nikoho přesvědčovat. Náš přístup je vlastně opačný. Na konkrétním příkladu pojmu strom chceme ukázat jak současná, velmi různorodá a velmi abstraktní matematika používá pojmy reálného světa. Jak pojmy vytváří z hlubších podobností a souvislostí (6). Vlastně je překvapivé jak často a mnohostranně se pojem strom vyskytuje a podtitul tohoto článku by mohl znít: **Překvapivá efektivita pojmu strom v matematice – i v umění.**

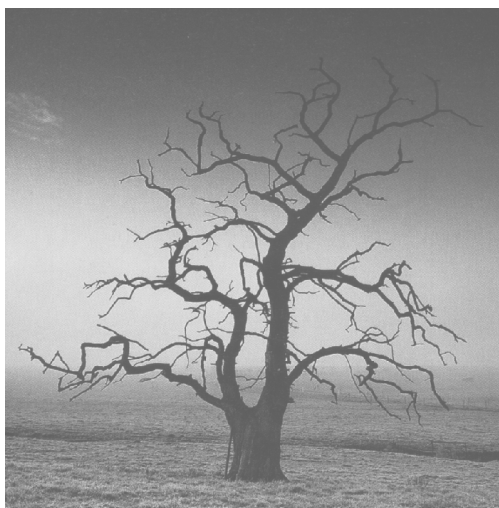
I v umění, neboť právě v nejabstraktnějších matematických použitích pojmu je možno vysledovat jisté analogie s konkrétními uměleckými činy (7). Bez nároků na úplnost jsem se pokusil v tomto textu shromáždit několik důvodů, proč je pojem stromu tak efektivní. Je-li důvodů uvedeno jen několik, ilustrací musí být samozřejmě ještě méně. Snad bude vhodná příležitost se k uvedené problematice vrátit.

Tento text je nutno považovat za rozšířenou synopsi přednášky přednesené na FF UK v listopadu 2004 (seminář organizoval D.Řehák a J. Starý) a na CTS UK v březnu 2005 (v rámci seminářů I.M.Havla). Děkuji M. Bálkovi při technickém zabezpečení přednášek a tohoto článku. Za cenné připomínky děkuji rovněž paní M. Nešlehové.

1. STROMY ZNÁME

Strom jako objekt, pojem nebo dokonce struktura.

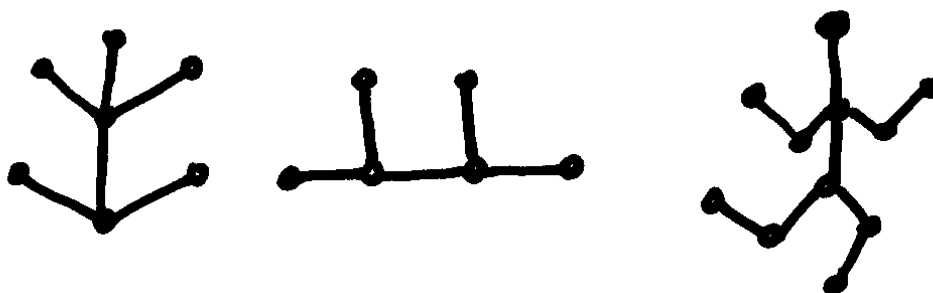
Strom považujeme v životě a rovněž v matematice za objekt a pojem důvěrně známý. Přesto tento pojem označuje nejrůznější objekty a jevy a těžko říci co je společným rysem všech těchto výskytů. Například z čistě formálního hlediska není mnoho společného na fotografii staré hrušky a autorově kresbě starých dubů (8).



V prvním přiblížení je možno říci, že ideovou podstatou stromů je postupné dělení a větvení. To samozřejmě vychází z názoru a přírody. Již ve starověkém Řecku se setkáme s „dendrity“, ale již v různých situacích. Strukturu stromů a větvení a jejich analogii s prouděním vody a tvarem koryt řek zkoumal Leonardo da Vinci (1508). Samozřejmě jeho analogie byly neúplné, dokonce úplně chybné (9). Zakladatel krystalografie M. Capeller hovoří v roce 1711 o „větvicích se strukturách“ (arbusculatum in modum) a identifikace stromových struktur v dalších oborech následovala, viz např. (10).

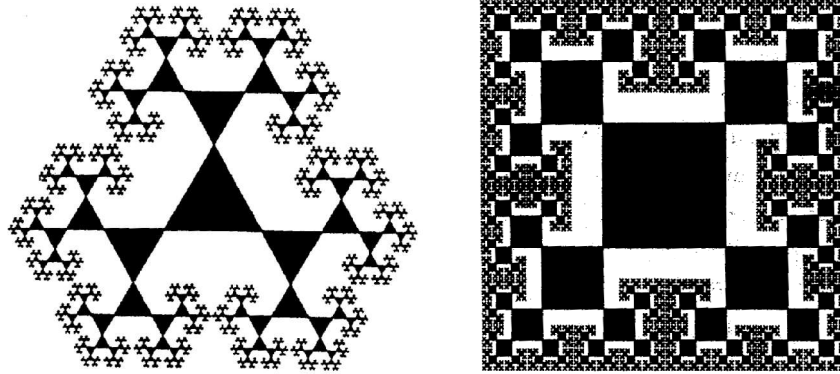
Jiným rysem pojmu strom je jeho jednoduchost. Ve většině případů strom představuje strukturu, kterou považujeme za jednoduchou, častou a běžnou. Strukturu, která je bezpečná, protože ji známe. V případě matematiky by se dalo dokonce říci, že stromy představují něco jako záchytný bod, pomocnou berličku ve virtuální realitě abstrakce. Tím, že něco nazýváme stromem si vlastně pomáháme, abychom se neztratili v abstraktní džungli.

Situace je však nepřehledná. Druhů stromu je nepřeborně a výskytu pojmu je o to více. Ani matematik nemůže tvrdit, že zná všechny tvary, výskytu pojmu strom (o tom se každý může přesvědčit na internetu). Můžeme tedy uvést pouze několik příkladů. Začněme jednoduše: strom je například speciální graf, tedy objekt složený z prvků spojených hranami. Několik příkladů ukazuje následující obrázek.

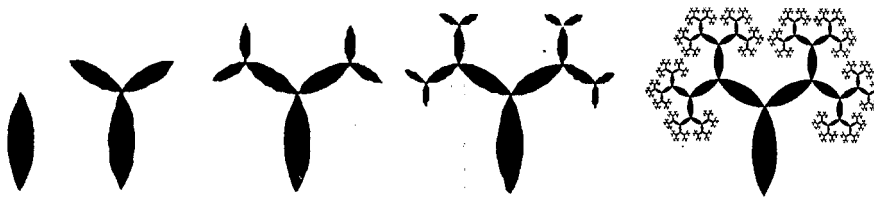


Vystihnout přesně, o co se jedná, je snadné: obrázek je z jednoho kusu (tj. je souvislý) a neobsahuje uzavřené tahy (neboli kružnice). Grafové stromy a jejich varianty jsou jedním z nejčastějších modelů v informatice, ale i v chemii. Blízko tomuto chápání stromu je rovněž interpretace stromu jako větvení. Větvení předpokládá, že strom má kořen, z kterého se postupně strom větví. Tato představa vede na běžnou a ustálenou terminologii: mluvíme o následnících, potomcích, předchůdcích, synech, otcích bodů. Kořen sám je tedy jakýsi praotec všech bodů. A od představy větvení je již krůček k představě stromu jako speciální relace. Historicky ale tato možnost vznikla mnohem později. Pravděpodobně proto, že její hlavní výhoda spočívá v tom, že můžeme mluvit o nekonečných a nespočetných stromech. Obrázek raději neukážeme, ale poznamenejme, že v těchto relačních stromech může mít prvek nekonečně potomků, ale jen konečně mnoho předchůdců. Ostatně jeden ze základních výsledků je tzv. Königovo lemma: má-li v nekonečném stromu každý prvek konečný počet synů, potom existuje prvek mající v přímé linii nekonečně mnoho potomků. Nevadí, jestliže čtenář nespécialista nerozumí všem detailům, smysl je snad zřejmý. Co by snad čtenáře mohlo překvapit, je jak se současná velmi abstraktní matematika vyjadřuje pomocí reálných pojmů – jaký rozdíl oproti úřednímu nebo politickému jazyku. Ale stromy jako grafy nebo relace (o obojím je možno se poučit v přístupné knize (11)) tvoří jen špičku ledovce. Následují stromy hypergrafové, relační, algebry-stromy, stromová kontinua ale i prostory-stromy, které pro změnu souvisí s prostory hypermetrickými. A zvláštní (a „obtížné“) stromy mají svá jména: Strom může být např. Cantorův, Suslinův, Aronszajnův, Baireův. To jsou vesměs stromy nespočetné a tedy stromy vymykající se názoru. Přesto jejich existence (v interpretaci jako kombinatorický axiom) kóduje vlastnosti dalších objektů, které pro změnu mohou být velmi názorné (např. měřitelné vlastnosti reálné úsečky).

Je vlastně překvapivé, že všechny tyto pojmy mají vůbec něco společného (12). Tím spíše, že hned uvedeme stromy, které mají úplně jinou nerelační povahu. Fraktální stromy, jejichž příklady jsou na obrázku, jsou zadány jako výsledek procesu, který vlastně imituje přírodu.



Jeden z fraktálních stromů se nazývá strom zlatý. Příklad jeho vytváření je na následujícím obrázku.



Jde o jednoduchý proces: strom se větví, větve rostou pod stále stejným úhlem 120° a jejich délka se zkracuje v každém kroku r -krát. Zřejmě pro r blízké 1 se větve téměř nezkracují a tedy se postupně zahustí a začnou se křížit. Na druhé straně pro malé hodnoty r (blízké 0) strom téměř neporoste a tedy se nebude křížit. Jaká je prahová hodnota r , kdy se právě větve nebudou křížit? Ukáže se snadno (vyřešením jedné kvadratické rovnice), že prahová hodnota je rovna $1/\rho$, kde $\rho = (\sqrt{5} + 1)/2$ je hodnota zlatého řezu. A tedy (s trochou číselné magie) $\rho = 0.618\dots$ a $1/\rho = \rho - 1 = 0.618\dots$

Na tomto místě poznamenejme, že autor si je vědom zásady, že „každý vzoreček sniží počet čtenářů o polovinu“. Na druhé straně je autorovou smělou ambicí propašovat (v duchu K. Čapka, J. L. Borgese, I. Vyskočila a dalších) do literárního časopisu alespoň jeden vzorec.

Po takovém ohňostroji pojmů a forem musí čtenáři připadat druhé heslo poněkud podivné.

2. STROMY JSOU JEDNODUCHÉ

Užitečnost pojmu strom se projevuje v tom, že je snadno uchopitelný (což není míněno ve smyslu nálepky na autoblatník: „Did you hug your tree today?“) Stromy známe, protože idea stromu je jednoduchá. Je zajímavé a překvapivé sledovat, jak často se strom vyskytuje ve vzdělávacích programech od mateřské školy až po vysokou školu. Strom je zpravidla jeden z prvních lidských výtvorů a provází ho celým životem (například ve formě nadace Strom života).

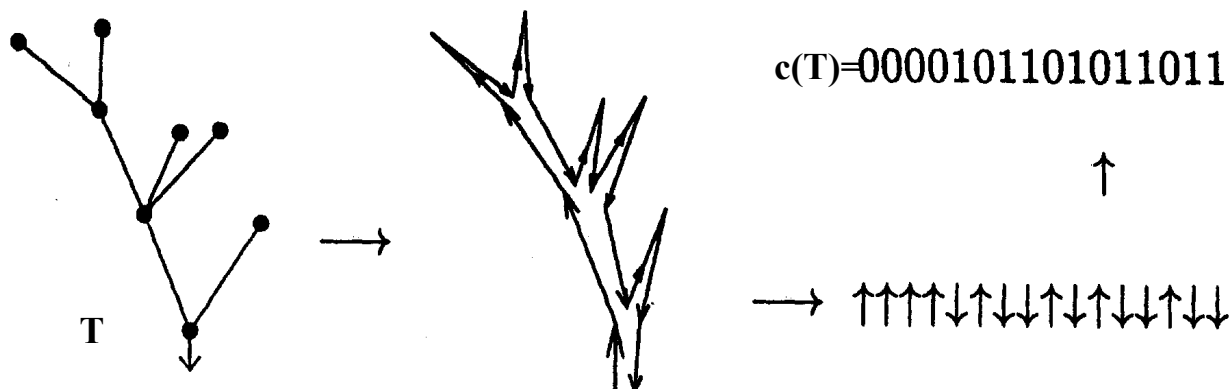
Tato jednoduchost stromů se projevuje i v matematice a vlastně v současnosti je tato jednoduchost základem jejich použití. Je důležité, že pro grafové stromy existují snadné odpovědi (které posléze vedou k rychlým algoritmům) na následující základní otázky:

Problém identifikace: Lze rozlišit strom od ne-stromů?

Problém isomorfismu: Lze rozhodnout zda dva stromy jsou podobné?

Oba tyto problémy lze zodpovědět kladně a navíc elegantně. To je v matematice velmi řídký jev, který se zdá být vyhrazen hlavně strukturám stromového typu. Jak se taková věc provede se učí na vysoké škole záhy. I v matematice se stromy používají při výchově a při přechodu od jednoduchého ke složitějšímu. Navíc postup připadá jako malé kouzlo:

Na následujícím obrázku je uveden příklad zakořeněného stromu, což je vyznačeno šipkou směřující dolů.



Stromu přiřadíme ve dvou krocích posloupnost nul a jedniček způsobem, který je s trochou snahy možno odvodit z obrázku. Posloupnost vlastně vytvoříme jako naznačené nakreslení stromu. Posloupnost můžeme považovat za kód stromu. V našem případě dostaneme 0000101101011011. Chceme-li naopak z této posloupnosti rekonstruovat původní strom, stačí postupovat jak je uvedeno na obrázku. Postupujeme tak, jako bychom strom postupně kreslili.

Je však také možné využít následujícího triku: místo každé nuly napíšeme levou závorku a místo každé jedničky pravou. Dostaneme tak nic neříkající posloupnost $((((())))))$. Tyto závorky lze nyní rozdělit do dvojic jako při vyhodnocování nějakého algebraického výrazu a jestliže uvážíme tyto dvojice jako prvky stromu a spojíme je hranou tehdy, když se „bezprostředně obsahují“ pak dostaneme opět původní strom.

Na první pohled se zdá, že věci zbytečně zesložítujeme. Např. kód $c(T)$ stromu T (T jako strom) je dvakrát tak dlouhý než obrázek. Ve skutečnosti je ale opak pravdou: isomorfismus obrázků, u kterého na první pohled není vůbec vidět jak jej nalézt a to ani teoreticky, uvedený postup převede na základní a tedy jednoduchou rovnost příslušných kódů. Symbolicky zapsáno:

Pro libovolné stromy T a T' platí vztah

$$T \cong T' \quad \text{právě když} \quad c(T) = c(T').$$

Podrobněji se o těchto otázkách čtenář může dočíst v (11).

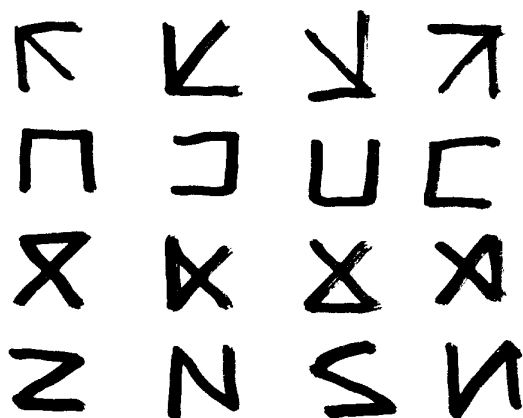
3. STROMY JSOU SLOŽITÉ

Když jsou všechny otázky pro stromy jednoduché, jak mohou být stromy užitečné? Jednoduchá struktura přeci nemůže být příliš užitečná při modelování věcí složitých.

A to je právě na stromech pěkné, že dokáží být složité. Už pro nejběžnější druh stromů je v podstatě nejjednodušší otázka složitá: Kolik je stromů zkonstruováno z jednoho, dvou či třeba n bodů?

Označíme-li toto číslo $t(n)$ snadno nahlédneme, že platí $t(1) = 1$, $t(2) = 1$, $t(3) = 3$.

Nakreslete si obrázek! A nyní, kolik je $t(4)$? Počáteční hodnoty napovídají, že možná 3 nebo 4. Opravdu? Překvapení se koná! Platí $t(4) = 16$, což je mnohem více, než by se dalo očekávat z počátečních hodnot. Ale je to opravdu správná hodnota, jak nás přesvědčí následující obrázek.



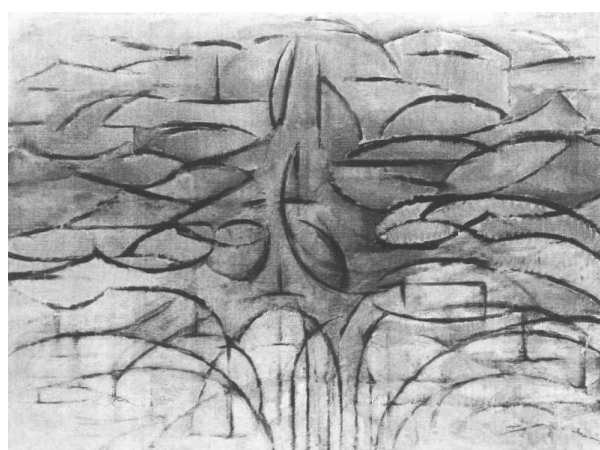
Když si tuto skutečnost pro $n = 4$ a taky pro $n = 5$ uvědomil anglický matematik 19. století Arthur Cayley, domníval se, že již odhalil všechna úskalí problému a vyslovil tvrzení:

Cayleyho vzorec: $t(n) = n^{n-2}$.

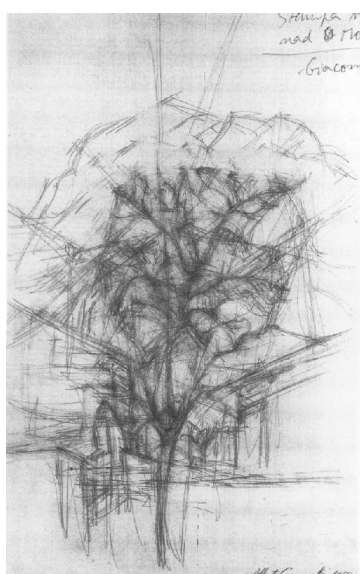
Tvrzení však nedokázal a důkaz ani nenaznačil (kromě ověření pro 4 a 5) a od té doby si matematici lámou hlavy, jak to vlastně myslel. A možná právě proto (ano, intelektuální soutěživost existovala a ještě existuje!) bylo nalezeno hned několik důkazů. Některé z nich jsou velmi důvtipné a některé jsou opravdové matematické perly. Nové důkazy se nalézají do dnešní doby a například knihy **(11)** a **(12)** obsahují mnoho z nich, **(11)** obsahuje hned 6 důkazů. Složitost pojmu strom bychom mohli doložit mnoha příklady. Ale článek by se stal příliš složitým, což by mohlo zastínit hlavní myšlenku. Spokojíme se tedy s jedním vzorcem.

4. STROM JE IDEÁL

Z abstraktního hlediska je strom struktura, která je v mnoha směrech extrémní, sloužící jako zárodek a test pro smělé konstrukce a objevy. To platí jak pro umění tak pro matematiku a příklady jsou specialistům známé. Na jedné straně analýza stromů v podání Cézana a Mondriana tvoří *grand tour de force* modernismu, který do dnešních dnů udivuje svojí konzistencí, soustředěním, hermetičností. Následující obrázky nepotřebují zajisté bližší určení.

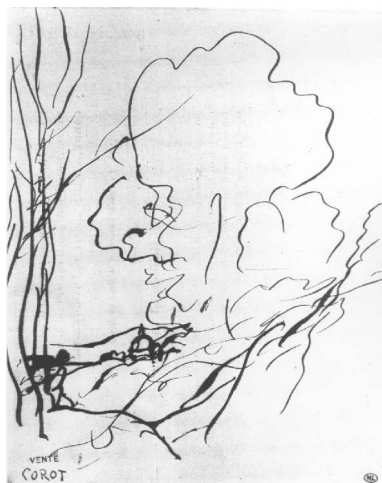


Mnoho umělců testuje své postupy, nabytou citlivost a nové formy na „standardních“ příkladech „svých“ stromů



Tyto ilustrace mohou být méně známe: vlevo je strom A. Giacomettiho v jeho rodné vesnici Stampa, vpravo jeden z mála motivů „ne zátíší“ G. Morandiho.

Strom jako umělcům důvěrné známá struktura vždy umožňoval smělé experimenty. Uvažme například nadčasovou skicu C. Corota



Ale i v matematice zaujímá analýza stromů historicky klíčové místo. Geometrické vlastnosti stromů stály u vzniku topologie, ale algebraické vlastnosti stromů jsou přímo kolébkou algebraické topologie, která vznikla ve stejné době jako klasický modernismus dvacátého století. Základní myšlenka dosud neztratila na aktuálnosti a atraktivnosti: (Grafový) strom můžeme vystihnout obrázkem a definujeme jej vlastnostmi tohoto znázornění (jak již víme je to obrázek z jednoho kusu a navíc neobsahuje kružnici). Ale můžeme také spočítat, že nějaký graf je strom. Lze totiž dokázat, že strom je souvislý obrázek, kde počet hran je o jednu menší než počet prvků. Jsou tedy stromy vyjádřeny numerickým invariantem, vztahem mezi počtem prvků a hran! Při velké rozmanitosti stromů je to pozoruhodná skutečnost, která dala základ celé rozsáhlé a dodnes velmi aktivní teorii – algebraické topologii (13).

5. STROM JE IDEA, STROM JE MÍRA VĚCÍ

Pro stručnost spojme obě hesla do jedné části (i když si zasluhují samostatného podání). Při veliké rozmanitosti jevů a objektů, které označujeme a zahrnujeme pomocí pojmu strom, je jenom přirozené považovat strom za ideu. Ideu, která se zračí a projevuje v konkrétních jevech. Pojem,

který popisujeme, je tak abstrakce mnoha různých objektů a má ideální povahu (jako většina matematických pojmů). Tento ideální rys je zdůrazněn ideálními vlastnostmi, které se stromům v jednotlivých významových souvislostech přisuzují. Tak v algebraickém kontextu strom vyjadřuje svobodu, absenci omezujících rovnic, volnou algebru. V informatickém kontextu, kde stromy hrají dnes opravdu důležitou roli, strom představuje hierarchickou strukturu, která může představovat schéma procesu nebo prohledávání, třídění. Lze možno říci, že analýza stromů je základem moderní teorie algoritmů. Však také jeden z prvních algoritmů, který ukázal na obtížnost, bohatost a rovněž aplikovatelnost rodící se teorie algoritmů, byl algoritmus pro hledání minimálního spojení v dané síti. Pro tuto úlohu se používá název „problém minimální kostry“ a v úplnosti ho vyřešili poprvé O. Borůvka a V. Jarník již před 80 lety (14). V kontextu matematické optimalizace tedy stromy vystupují jako extrémální (minimální nebo maximální) struktury.

Strom rovněž slouží ke kalibraci a přiblížení složitějších struktur. Klasická teorie aproximace („každou spojitou funkci lze přiblížit polynomem“) našla nová paradigmata:

- I. Lze aproximovat každý graf pomocí vhodného stromu?
- II. Lze aproximovat každý metrický prostor pomocí vhodného stromu?

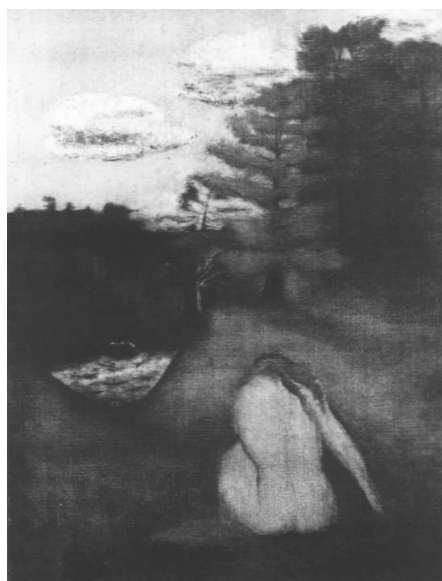
Otázka I. vedla k definicím rozličných pojmů. Například stromová šířka, stromová hloubka, šířka větvení a mnoha dalších, které jsou dnes důležité jak z algoritmického tak strukturálního hlediska.

Otázka II. byla studována v hraniční oblasti analýzy, geometrie a kombinatoriky, což v současnosti vedlo k celé nové oblasti zvané Metrická Ramseyova teorie (15).

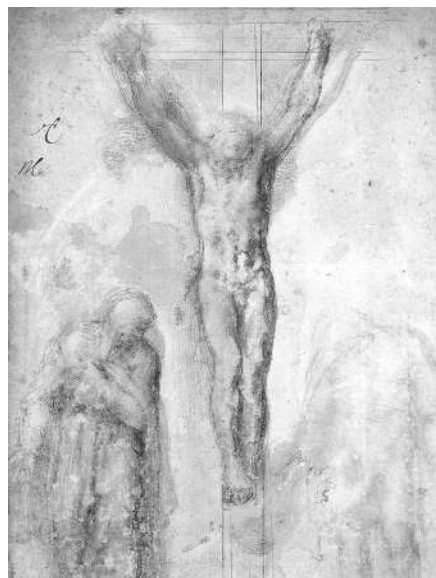
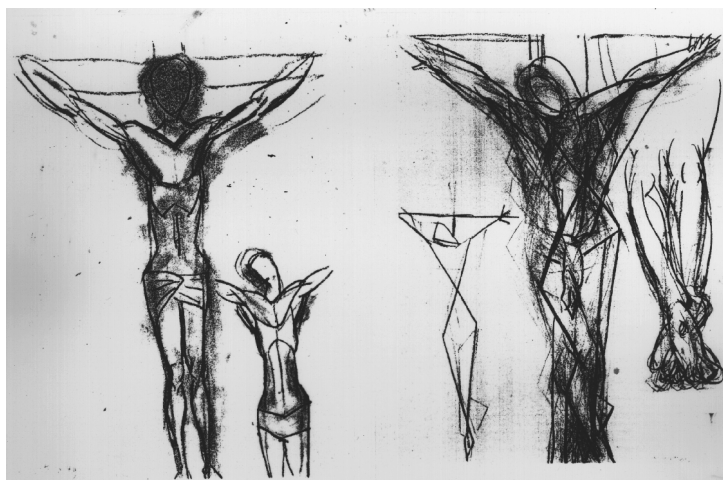
Přidejme ještě jednu, velmi nedávnou, a zdá se důležitou souvislost: v hraniční oblasti teorie pravděpodobnosti matematické analýzy a statistické mechaniky se vyšetřují limitní procesy, které vzniknou např. při hledání minimální kostry při stále se zjemňující mřížce.

Výsledek procesu se opět nazývá strom-uniformní minimální strom. Přitom se nejedná o žádný stromu podobný objekt – je to pravděpodobnostní rozdělení vzniklé limitním procesem. Tedy žádný obrázek, nebo alespoň ne obvyklý obrázek (16).

Jak je tato situace obdobná malířství, kde strom rovněž často vyjadřuje míru věcí. Míru často pouze ve smyslu ideovém a pocitovém. Jak jsou následující dva obrázky podobné ve svém řešení i účinku. Přitom je dělí několik století (V. Carpaccio, 1510; J. Šíma).



A přímo dojemně působí pozdní návrhy a kresby H. Matisse a Michelangela.



Autor se domnívá, že Matisse a Michelangelo ve svém stáří zdůrazňovali a tíhli, možná implicitně, ke stromovým a obecně přírodním tvarům. Možná má čtenář názor jiný, ale v každém případě do tohoto článku tyto kresby svým výtvarným řešením náleží.

6. ZÁVĚR

Vraťme se k původní otázce a myšlence: Proč jsou stromy tak vhodné při modelování a označování matematických mnohdy značně abstraktních struktur? Uvedli jsme různé myšlenkové konstrukce a konkrétní příklady, které ukazují na nesmírnou variabilitu pojmu strom. Tyto příklady rovněž ukazují na to, jak hluboce je tento pojem zakořeněn v našem myšlení a v elementárních procesech poznání. Příklady rovněž vypovídají o tom, jak jsou abstraktní pojmy matematiky v souladu s reálným myšlením a zkušeností. Tuto skutečnost nelze podceňovat ani v nejabstraktnějších oblastech matematiky, abychom potom nebyli překvapeni její „neodůvodnitelnou účinností“.

Poznámky

- 1) E. Wigner: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Comm. In Pure and Applied Mathematics, 13 (1960), 1-14.
- 2) A Lesk: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Molecular Biology, The Mathematical Intelligencer, 22,2 (2000), 28-36. Název článku měl znít „The Unreasonable Ineffectiveness of Mathematics in Molecular Biology“ jak autor vysvětluje ve stejném časopise 23,1 (2001), 4. (To nepřímo svědčí o popularitě Wignerova článku!).
- 3) K. Velupillai: The unreasonable Ineffectiveness of Mathematics in economics, Discussion Paper 6 (2004), Università di Trento. Tento článek poukazuje na nekonstruktivní povahu (z hlediska konstruktivní matematiky) klasických pojmů matematické ekonomie.
- 4) R.W. Hamming: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics, American Math. Monthly 87,2 (1980), 81-90.
- 5) The unreasonable effectiveness of number theory (S.A.Burr, ed.) Proc. Symp. In Applied Math., Amer. Math. Soc. 1993.

- 6) Přeformulováno podle W. Kandinsky: Point and line to Plane, Dover Publications 1979. O souvislostech matematiky a umění pojednávalo např. nedávné sympozium: Histoire et épistémologie des mathématiques discrètes (organizované P. Rosenstiehlem), viz <http://www.ehess.fr/centres/cams/hemd.html>.
- 7) Není a vzhledem k rozsahu ani nemůže být cílem tohoto článku komentovat vztah matematiky (vědy) a umění. Tyto vztahy jsou však předmětem dlouhodobého zájmu autora, viz např. J. Načeradský, J. Nešetřil: Antropogeometrie I.,II., Rabasova galerie, Rakovník 1978, J. Nešetřil: Aesthetics for Computers, or How to measure Harmony. In: Visual Mind II, MIT Press, 2005.
- 8) Legendární duby Čech, Lech a Rus v zahradě zámku Rogalin u Poznaň.
- 9) Tomuto tématu je věnován článek M. Mendés-France: Mohou malíři dělat chyby? uveřejněný v katalogu Antropogeometrie I uvedeném v poznámce (7).
- 10) Branching in Nature (V. Fleury, J.F. Gouyet, M. Léonetti, editoři) Springer, 2001.
- 11) J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskretní matematiky, Karolinum 1998.
- 12) Jedním z pokusů o ucelený obecný výklad kombinatorického vytváření stromových struktur je publikace: F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux: Combinatorial Species and Tree-like Structures, Cambridge Univ. Press 1997
- 13) Uvedme nedávnou knihu J. Matouška, Using the Borsuk-Ulam Theorem, Springer 2003, která právě pojednává o jednom, v současnosti velmi aktivním směru aplikací algebraické topologie.
- 14) O práci Borůvkově a Jarníkově v této oblasti se lze dočíst v podstatě každé učebnici kombinatorické optimalizace a teorie algoritmů. Existují i historické práce. Poslední a nejúplnější (včetně překladu originálních prací) jsou:
 J. Nešetřil, H. Nešetřilová, E. Milková: Otakar Borůvka – origins of MST-problem, Discrete Mathematics 233 (2001), 3-36.
 B. Korte, J. Nešetřil : Vojtěch Jarník's work in combinatorial optimization. In: Life and work of Vojtěch Jarník, Prometheus, Praha, 1999, 37-54.
- 15) Y. Bartal, N. Linial, M. Mendel, A. Naor: On Metric Ramsey Type Phenomena, STOC 2003; úplná verze vyjde v Annals of Mathematics.
- 16) Tato problematika souvisí s teorií fraktálů a důležitou roli zde hraje tzv. Loewnerova diferenciální rovnice (dle K. Löwnera, v roce 1938 profesora UK) I. Benjamini, R. Lyons, Y. Perez, O. Schramm: Uniform spanning forests, Ann. Probab. 29 (2001), 1-65

Práce podporovaná grantem MŠMT 1M0021620808

Jaroslav Nešetřil
Katedra aplikované matematiky (KAM) a Institut Teoretické Informatiky (ITI),
Univerzita Karlova
Matematicko fyzikální fakulta
Malostranské nám. 25
118 00 Praha 1